Daniel Muzzulini: Lineare Algebra der Fibonacci-Folge

Mathematische Grundlagen

Matrizen, lineare Abbildungen

Seien $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ eine 2×2-Matrix und $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ Ortsvektoren von Punkten der reellen Zahleneben ($\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

Sind $\overline{\alpha_1} = [a_{11} \quad a_{12}]$ und $\overline{\alpha_2} = [a_{21} \quad a_{22}]$ die *Zeilenvektoren* von A, dann lässt sich A als Blockmatrix darstellen: $A = \begin{bmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \hline \overline{\alpha_2} \end{bmatrix}$. Entsprechend lässt sich A auch mit Hilfe der *Spaltenvektoren* $\underline{a_1}$ und $\underline{a_2}$ darstellen: $\left[\underline{a_1}, \underline{a_2}\right]$.

Jede $n \times n$-Matrix kann als Darstellungsmatrix einer linearen Selbstabbildung aufgefasst werden A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\underline{x} \mapsto \underline{y} = A \cdot \underline{x}$. Insbesondere stellt also eine 2×2-Matrix eine lineare Selbstabbildung der reellen Zahlenebene auf sich selbst dar. Hierbei ist das *Matrixprodukt* $A \cdot \underline{x}$ einer quadratischen 2×2-Matrix mit einem Spaltenvektor wie folgt über das Skalarprodukt definiert:

$$\underline{y} = A \cdot \underline{x} = \begin{bmatrix} \alpha^{[1]} \\ \alpha^{[2]} \end{bmatrix} \cdot \underline{x} = \begin{bmatrix} \alpha^{[1]} \cdot \underline{x} \\ \alpha^{[2]} \cdot \underline{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

Die erste Komponente des Ergebnisvektors $\underline{y}$ ist demnach das Skalarprodukt der ersten Zeile von A mit x, und die zweite Komponente des Ergebnisvektors $\underline{y}$ ist das Skalarprodukt der zweiten Zeile von A mit $\underline{x}$.

Beispiele

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A_1: Spiegelung an der Winkelhalbierenden $x_1 = x_2$
A_2: Drehung um den Winkel φ im Gegenuhrzeigersinn
A_3: zentrische Streckung um (0, 0) mit Streckungsfaktor k
A_4: Scherung um t in x_1-Richtung
A_5: Projektion auf die x_1-Achse

Das Produkt C zweier quadratischer 2×2-Matrizen A und B kann auf die Multiplikation Matrix mal Vektor zurückgeführt werden und ergibt in Blocknotation:

$$A \cdot B = \left[A \cdot \underline{b_1}, \quad A \cdot \underline{b_2}\right].$$

[Das gewählte Vorgehen kann problemlos auf beliebige quadratische und nicht quadratische Matrizen verallgemeinert werden. Eine $m \times n$-Matrix A aus m Zeilen und n Spalten stellt eine lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\underline{x} \mapsto \underline{y} = A\underline{x}$ dar. Dabei ist $\underline{x}$ ein Spaltenvektor mit n Elementen und $\underline{y}$ eine Spaltenvektor mit m Elementen.]

Lineare Abbildung, Basis, Orthogonalität

Eine lineare Abbildung $f: \quad U \to W, \quad \underline{u} \mapsto \underline{w} = f(\underline{u})$ zwischen den Vektorräumen U und W hat folgende Eigenschaften:

(i) $f(\underline{u}+\underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ Additivität

(ii) $f(\lambda \cdot \underline{u}) = \lambda \cdot f(\underline{u})$ Homogenität bezüglich der Multiplikation mit einem Skalar λ.

Aus (ii) ergibt sich sofort, dass bei einer linearen Abbildung der Nullvektor von U auf den Nullvektor von W abgebildet wird: $f(\underline{0}) = \underline{0}$.

Es lässt sich leicht überprüfen, dass für $U = W = \mathbb{R}^2$ die oben definierte Vektorzuweisungen via 2×2-Matrizen lineare Abbildungen darstellen

$$A: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \underline{x} \mapsto \underline{y} = A \cdot \underline{x}.$$

Umgekehrt wird jede lineare Abbildung zwischen Vektorräumen mit vorgebenen Basen durch eine Matrix vermittelt.

Die definierenden Eigenschaften (i) und (ii) besagen, dass es genügt eine lineare Abbildung auf einer *Basis* zu definieren. Die Funktionswerte aller übrigen Vektoren ergeben sich dann zwingend durch Linearkombination.

Die *Standardbasis* von $\mathbb{R}^2$ besteht aus den beiden Vektoren $\underline{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Diese stehen senkrecht aufeinander und haben die Länge 1.

Für die Bilder der Basivektoren gilt:

$$A \cdot \underline{e_1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \underline{a_1}, \quad A \cdot \underline{e_2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \underline{a_2}.$$

Das Bild des ersten Basisvektors ist die erste Spalte von A, das Bild des zweiten Basisvektors ist die zweite Spalte von A, wenn die Standardbasis zu Grunde liegt.

Die Matrix $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left[\underline{e_1}, \underline{e_1}\right]$ heisst *Einheitsmatrix*. Für sie gilt gemäss obiger Rechnung: $A \cdot I = A$. Sie ist also bezüglich Matrixmultiplikation *rechtsneutral* zu jeder beliebigen 2×2-Matrix.

Multipliziert man die den Standardbasisvektoren entsprechenden Zeilenvektoren von links mit einer Matrix A, werden die zugehörigen Zeilenvektoren extrahiert:

$$\overline{\varepsilon_1} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} = \overline{\alpha_1}, \quad \overline{\varepsilon_2} \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \overline{\alpha_2}.$$

Es gilt folglich auch $I \cdot A = A$, das heisst I ist auch linksneutral bezüglich Matrixmultiplikation *für* beliebige 2×2-Matrizen. Die Matrix I spielt die Rolle der (multiplikativen) Eins in der Matrizenalgebra.

Skalarprodukt

Allgemein wird das Skalarprodukt zwischen n-Vektoren wie folgt definiert

$$<\underline{a},\underline{b}>:=\underline{a}^T\cdot\underline{b}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\text{, dabei ist }\underline{a}^T=[a_1,a_2,\cdots,a_n]\text{, der zu }\underline{a}=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\textit{ transponierte }\text{Vektor.}$$

Eine 1×1-Matrix ist hier stillschweigend mit einer Zahl gleichgesetzt.
Das Skalarprodukt erlaubt die Definition von *Längen* und *Winkeln*:
Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren heissen *orthogonal*, wenn ihr Skalarprodukt 0 ist.

Die *(euklidische) Norm* oder *Länge* eines Vektors ist durch $|\underline{a}|=\sqrt{<\underline{a},\underline{a}>}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}$ gegeben.

Offensichtlich führt diese Definition im Falle $n=2$ oder 3 auf die bekannten Längenberechnungen mit dem Satz von Pythagoras. Der *Abstand* zweier Punkte entspricht der Länge ihres Differenzvektors.

Die Definition des Winkels φ zwischen zwei Vektoren geschieht über $\cos(\varphi)=\dfrac{<\underline{a},\underline{b}>}{|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|}$.

Daraus ergibt sich (ohne Beweis) der übliche Winkelbegriff in zwei und drei Dimensionen.
Das Skalarprodukt ist eine sogenannte Bilinearform ($\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$). Es ist eine Operation zwischen zwei Vektoren, deren Ergebnis eine Zahl ist. Im Unterschied dazu ist die Vektoraddition eine Operation, die zwei Vektoren einen Vektor zuweist ($\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$), und die Multiplikation eines Skalars mit einem Vektor hat als Ergebnis einen Vektor ($\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$).

Gesetze der Matrixmultiplikation, Invertierbarkeit

Die Matrixmultiplikation für Matrizen (deren Dimensionen zusammenpassen) ist *assoziativ*. Es gilt also $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$ und $A\cdot(B\cdot\underline{x})=(A\cdot B)\cdot\underline{x}$ für 2×2-Matrizen A, B, C und Vektoren $\underline{x}$ der Ebene. Die Klammern dürfen wie bei der Algebra mit Zahlen beliebig gesetzt oder auch weggelassen werden. Das Matrixprodukt kann als Verkettung linearer Abbildungen gedeutet werden:

$$\underline{x}\quad\mapsto\quad\underline{y}=B\cdot\underline{x}\quad\mapsto\quad\underline{z}=A\cdot\underline{y}=AB\cdot\underline{x}$$

Zuerst wird die Abbildung B auf $\underline{x}$ und dann auf das Zwischenergebnis die Abbildung A angewandt.
Die Matrixmultiplikation ist *nicht* allgemein *kommutativ*, wie folgendes willkürliche Beispiel illustriert:

$$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\3&3\end{bmatrix}\text{ aber }\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&6\\0&0\end{bmatrix}.$$

Die Reihenfolge der Faktoren eines Matrixprodukts darf demnach nicht verändert werden. Dies ist ein schwerwiegender Unterschied der Matrixarithmetik im Vergleich zur gewöhnlichen Arithmetik mit Zahlen.
Ferner ist keine allgemeine Division zweier Matrizen definiert. Hingegen wird die inverse Matrix A^{-1} zu einer quadratischen Matrix A durch die Beziehung $A\cdot A^{-1}=I$ definiert. Dabei ist zu beachten, dass nicht jede Matrix invertierbar ist. Invertierbare Matrizen heissen auch *regulär*, nicht invertierbare Matrizen *singulär*. Dividieren könnte man höchstens durch reguläre Matrizen, statt A/B schreibt man aber gewöhnlich $A\cdot B^{-1}$, eine Schreibweise, die ja auch für gewöhnliche Zahlen zulässig ist.

Im Unterschied zu den reellen Zahlen, wo nur die 0 bezüglich Multiplikation nicht invertierbar ist, sind alle singulären Matrizen nicht invertierbar.
Aus $A \cdot A^{-1} = I$ folgt $A^{-1} \cdot A = I$. Eine sogenannte *rechtsinverse* Matrix ist somit immer auch *linksinvers*.

Die inverse Matrix beschreibt die *inverse Abbildung*.
Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot (-t) + t \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot (-t) + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die beiden Scherungen um t und –t heben sich, wenn sie hintereinander ausgeführt werden, auf.

[Bemerkung: Elementweise Multiplikation und Division von Matrizen werden hier nicht als zulässige Operationen betrachtet.]

Satz 1

Für eine $n \times n$-Matrix A sind folgende Aussagen gleichwertig:

(i) A ist invertierbar
(ii) Die Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig
(iii) Die Spaltenvektoren von A bilden eine Basis in $\mathbb{R}^n$.
(iv) Die Zeilenvektoren von A sind linear unabhängig
(v) $\det A \neq 0$
(vi) A stellt eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $\mathbb{R}^n$ auf sich selbst dar.

Bemerkungen:
Eine *Basis* ist ein minimales Erzeugendensystem: Jeder Vektor kann in eindeutiger Weise als Linearkombination der Basisvektoren geschrieben werden. *Linearkombinationen* sind endliche Ausdrücke der Form $\sum_i \lambda_i \cdot \underline{v}_i$ mit rellen Zahlen λ_i und Vektoren $\underline{v}_i$, das heisst endliche Summen von skalaren Vielfachen von Vektoren.
Für $n = 2$ sind zwei Vektoren genau dann *linear unabhängig*, wenn sie nicht *kollinear* sind, das heisst wenn der eine nicht ein (skalares) Vielfaches des andern ist. Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren sind linear unabhängig, wenn Sie in verschiedene Richtungen weisen.
Für beliebiges n ist die Situation komplizierter: Eine Matrix ist genau dann *invertierbar*, wenn ihre Determinante verschieden von 0 ist. Determinanten können rekursiv berechnet werden. Es gibt auch eine explizite Formel zur Berechnung der inversen Matrix mit Hilfe von Determinanten. Effizienter ist aber die Bestimmung der inversen Matrix mit Hilfe des Gauss-Algorithmus. Es wird dabei die Matrixgleichung $A \cdot X = I$ durch Zeilenoperationen nach X aufgelöst. Dazu werden n Gleichungssysteme mit gleicher Systemmatrix A simultan gelöst.

Flächeninhalt
Für eine 2×2-Matrix A gilt $\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$. Sie ist die Masszahl des von den beiden Spaltenvektoren aufgespannten Parallelogramms.

Eigenvektoren, Eigenwerte, Normierung

Ein Eigenvektor einer Matrix A ist ein vom Nullvektor verschiedener Vektor $\underline{v}$ für den $A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$ mit einer geeigneten Zahl λ gilt. Die Zahl λ heisst dabei Eigenwert zum Vektor $\underline{v}$.

Eigenvektoren werden bei der Anwendung der Abbildung A nur gestreckt oder gestaucht. Das heisst der Bildpunkt P' von P liegt auf der Verbindungsgerade $\overline{OP}$, wenn P den Ortsvektor $\underline{v}$ hat.
Von Interesse sind Matrizen, die eine Vektorraumbasis aus Eigenvektoren haben. Für 2×2 - Matrizen braucht es hierfür zwei Eigenvektoren, die verschiedene Richtungen haben.

Mit jedem Eigenvektor ist auch ein skalares Vielfaches ein Eigenvektor. Zu einem gegebenen Eigenvektor $\underline{v}$ existiert also immer ein Eigenvektor $\tilde{\underline{v}}$ der Länge 1, nämlich $\tilde{\underline{v}} = \frac{1}{|\underline{v}|} \cdot \underline{v}$. Ein solcher Eigenvektor heisst normiert.
Eine *orthonormierte Matrix T* ist eine Matrix, deren Spalten paarweise orthogonal zueinander sind und die je die Länge 1 haben. Für orthonormierte Matrizen gilt
$T^T \cdot T = I$, das heisst die *transponierte Matrix* zu T ist zugleich ihre Inverse. Die transponierte Matrix einer beliebigen Matrix entsteht durch Spiegelung des Zahlenschemas an der Hauptdiagonalen.

Bestimmung der Eigenvektoren, charakteristisches Polynom

Die definierende Eigenschaft $A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$ der Eigenwerte lässt sich wie folgt in ein *homogenes Gleichungssystem* für $\underline{v}$ umformen:

$$A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v} \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot I \cdot \underline{v} \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot \underline{v} - \lambda \cdot I \cdot \underline{v} = \underline{0} \Leftrightarrow \quad (A - \lambda \cdot I) \cdot \underline{v} = \underline{0}.$$

Dieses System hat wegen Satz 1 genau dann vom Nullvektor verschiedene Lösungen, wenn $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$ ist. Diese Determinante, als Funktion von λ aufgefasst, wird *charakteristisches Polynom* genannt. Seine Nullstellen sind die Eigenwerte von A.
Das Vorgehen bei der Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren ist das folgende:

(1) Aufstellen des charakteristischen Polynoms chp(A,λ) zu A.
(2) Bestimmung der Nullstellen λ_j
(3) Lösung der Gleichungssysteme $(A - \lambda_j \cdot I) \cdot \underline{v} = \underline{0}$ d.h. Bestimmung von Basen der zugehörigen Lösungsräume.

Bemerkung: Die Lösungsmenge von Vektorgleichungen der Form $B \cdot \underline{x} = \underline{0}$ ist immer ein Teilraum des Startraumes der zugehörigen Abbildung und wird *Kern* der linearen Abbildung genannt. Der Kern ist somit der Vektorraum, der auf $\underline{0}$ abgebildet wird. Im Falle einer 2×2 - Matrix ist der Kern der Nullraum (der Vektorraum der nur aus dem Nullvektor besteht), eine Ursprungsgerade oder die ganze Ebene. Der Fall des Nullraums kann in Schritt (3) nicht auftreten.

Das Symmetrische Eigenwertproblem

Eine Matrix heisst symmetrisch, wenn sie gleich ihrer transponierten Matrix ist. Die Zahlenanordnung einer symmetrischen Matrix ist symmetrisch zur Hauptdiagonalen.
Eine 2×2 -Matrix A ist genau dann symmetrisch, wenn $a_{12} = a_{21}$ gilt.

Satz 2

Jede quadratische symmetrische Matrix A ist duch eine geeignete orthonormierte Matrix T diagonalisierbar:
Das heisst $T^T \cdot A \cdot T = D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Dabei sind λ_i die Eigenwerte von A und die Spalten von T sind (normierte) Eigenvektoren von A. Die Eigenwerte müssen dabei nicht notwendigerweise verschieden sein, und sie können auch 0 werden.

Folgerung:
Multipliziert man die Matrixgleichung $T^T \cdot A \cdot T = D$ von links mit T und von rechts mit T^T so ergibt sich:

$$T \cdot (T^T \cdot A \cdot T) \cdot T^T = TD \cdot T^T.$$

Wegen der Assoziativität der Matrixmultiplikation und der Orthonormalität von T folgt daraus

$$TD \cdot T^T = T \cdot (T^T \cdot A \cdot T) \cdot T^T = (\underbrace{T \cdot T^T}_{=I}) \cdot A \cdot (\underbrace{T \cdot T^T}_{=I}) = I \cdot A \cdot I = A.$$

Anwendung auf die Fibonacci-Folge

Die Fibonacci-Folge ist durch die Startwerte $\alpha_0=0$ und $\alpha_1= 1$ und die folgende Rekursionvorschrift definiert:

$$\alpha_{i+2} = \alpha_{i+1} + \alpha_i.$$

Die ersten Glieder der Folge lauten:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55

Mit den Definitionen des Vektor $\underline{a}_n := \begin{bmatrix} \alpha_{n+1} \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ und der Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ lässt sich diese Rekursionsbeziehung in eine Matrixgleichung umwandeln:

$$\underline{a}_{n+1} := \begin{bmatrix} \alpha_{n+2} \\ \alpha_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{n+1} + \alpha_n \\ \alpha_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{n+1} \\ \alpha_n \end{bmatrix} = A \cdot \underline{a}_n.$$

A ist symmetrisch, und Satz 2 ist anwendbar.
Es ist

$$\det(A - \lambda I) = \det(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}) = (1-\lambda) \cdot (-\lambda) - 1 \cdot 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$$

und somit

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Die beiden Eigenwerte von A sind somit $-g$ und $\frac{1}{g}$, wenn g das Verhältnis des *goldenen Schnittes* bezeichnet $g = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Weil zwei verschiedene Eigenwerte vorliegen, sind die zugehörigen Eigenräume je eindimensional.
Die beiden normierten Eigenvektoren sind

$$\underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{g^2+1}} \begin{bmatrix} 1 \\ g \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{g^2+1}} \begin{bmatrix} -g \\ 1 \end{bmatrix} \text{und es ist } \underline{v}_1 \perp \underline{v}_2.$$

Aus der Rekursionsbeziehung $\underline{a}_{n+1} = A \cdot \underline{a}_n$ ergibt sich $\underline{a}_n = A^n \cdot \underline{a}_0$ und wegen $TD \cdot T^T = A$ ist

$$A^n = (T \cdot D \cdot T^T)^n = (T \cdot D \cdot T^T) \cdot (T \cdot D \cdot T^T) \cdot \ldots \cdot (T \cdot D \cdot T^T) \cdot (T \cdot D \cdot T^T) =$$
$$T \cdot D \cdot (\underbrace{T^T \cdot T}_{=I}) \cdot D \cdot (T^T \cdot \ldots \cdot T \cdot D \cdot (\underbrace{T^T \cdot T}_{=I}) \cdot D \cdot T^T = T \cdot D^n \cdot T^T$$

Für g gelten die folgenden Rechenregeln $g^2 = 1 - g, \quad \frac{1}{g} = 1 + g, \quad g + \frac{1}{g} = \sqrt{5}$.

Folglich ist $g^2+1=(g+\frac{1}{g})\cdot g=\sqrt{5}\cdot g$. Diese Beziehung wird in der folgenden Umformung verwendet. Ferner werden die beiden Normierungsfaktoren $\frac{1}{\sqrt{g^2+1}}$ zu $\frac{1}{g^2+1}$ zusammengefasst.

$$A^n=T\cdot D^n\cdot T^T=\frac{1}{g^2+1}\cdot\begin{bmatrix}1 & -g\\ g & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{g^n} & 0\\ 0 & (-g)^n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & g\\ -g & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{g^2+1}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{g^n} & (-g)^{n+1}\\ \frac{1}{g^{n-1}} & (-g)^n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & g\\ -g & 1\end{bmatrix}=$$

$$\frac{1}{g^2+1}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{g^n}+(-g)^{n+2} & \frac{1}{g^{n-1}}+(-g)^{n+1}\\ \frac{1}{g^{n-1}}+(-g)^{n+1} & \frac{1}{g^{n-2}}+(-g)^n\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}\cdot g}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{g^n}+(-g)^{n+2} & \frac{1}{g^{n-1}}+(-g)^{n+1}\\ \frac{1}{g^{n-1}}+(-g)^{n+1} & \frac{1}{g^{n-2}}+(-g)^n\end{bmatrix}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{g^{n+1}}-(-g)^{n+1} & \frac{1}{g^n}-(-g)^n\\ \frac{1}{g^n}-(-g)^n & \frac{1}{g^{n-1}}-(-g)^{n-1}\end{bmatrix}$$

Somit ergibt sich aus $\underline{a}_n=A^n\cdot\underline{a}_0$ durch Einsetzen der Startwerte

$$\begin{bmatrix}\alpha_{n+1}\\ \alpha_n\end{bmatrix}=A^n\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{g^{n+1}}-(-g)^{n+1} & \frac{1}{g^n}-(-g)^n\\ \frac{1}{g^n}-(-g)^n & \frac{1}{g^{n-1}}-(-g)^{n-1}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{g^{n+1}}-(-g)^{n+1}\\ \frac{1}{g^n}-(-g)^n\end{bmatrix}$$

Daraus lässt sichdie explizite Formel für die Fibonacci-Folge ablesen:

$$\alpha_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\frac{1}{g^n}-(-g)^n\right] \text{ mit } g=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ (Formel von Binet)}$$

Bei der Rechnung wurde von den Rechenregeln für g Gebrauch gemacht:

$$g^2=1-g,\quad \frac{1}{g}=1+g,\quad g+\frac{1}{g}=\sqrt{5}.$$

s. o.

Aus der Formel von Binet ergibt sich die Konvergenz der Quotientenfolge (n > 0):

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\frac{1}{g^{n+1}}-(-g)^{n+1}\right]}{\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\frac{1}{g^n}-(-g)^n\right]}=\frac{\left[\frac{1}{g^{n+1}}-(-g)^{n+1}\right]}{\left[\frac{1}{g^n}-(-g)^n\right]}=\frac{\frac{1}{g^{n+1}}+0(n)}{\frac{1}{g^n}+0(n)}=\frac{1}{g}+0(n).$$

Die Notation $0(n)$ besagt, dass die Korrekturterme gegen 0 konvergieren. Es ist also

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\frac{1}{g}$$

Wählt man stattdessen die Startwerte $\alpha_0=1$ und $\alpha_1=0$ erhält man die Zahlenfolge

1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55

Dies ist die Fibonacci-Folge mit einer um 1 verschobenen Indizierung. Ihre Quotientenfolge (n > 1) hat somit den gleichen Grenzwert.

Für beliebige Startwerte konvergiert die Quotientenfolge ebenfalls gegen $\frac{1}{g}$. Dies kann anschaulich begründet werden:

Werden statt der Standardbasisvektoren die beiden normierten Eigenvektoren

$$\underline{v}_1=\frac{1}{\sqrt{g^2+1}}\begin{bmatrix}1\\g\end{bmatrix},\quad \underline{v}_2=\frac{1}{\sqrt{g^2+1}}\begin{bmatrix}-g\\1\end{bmatrix} \text{ der Fibonaccimatrix } A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

als Basis der Ebene zu Grunde gelegt, dann wird ersichtlich, dass die Wirkung der Abbildung A^n eine Streckung mit $(-g)^n$ in Richtung von $\underline{v}_1$ und eine Streckung mit $\frac{1}{g^n}$ in Richtung von $\underline{v}_2$ ist. (Flächentreu!)

Es ist aber $\lim_{n\to\infty}(-g)^n = 0$, da $|-g| < 1$. Für $n \to \infty$ dominiert folglich $\frac{1}{g^n}$, da $\frac{1}{g} > 1$. Beliebige Startpunkte $\underline{a_0}$ werden durch die Iteration immer näher zur Hauptachse $\underline{v_2}$ gezogen, aber Sie entfernen sich immer mehr vom Koordinatenursprung, und zwar so dass sich das Abstandsverhältnis zweier aufeinander folgender Punkte dem Verhältnis des goldenen Schnittes immer besser annähert. $\lim_{n\to\infty}\frac{|\underline{a_{n+1}}|}{|\underline{a_n}|} = \frac{1}{g}$.

Herleitung der Formel von Binet ohne Theorie der Eigenwerte

Lösungsansatz für die Rekursionsformel $\alpha_{i+2} = \alpha_{i+1} + \alpha_i$:

$\alpha_n = \lambda^n$.

Dies führt auf die Gleichung $\lambda^{n+2} = \lambda^{n+1} + \lambda^n$ und via Division durch λ^n auf die quadratische Gleichung $\lambda^2 = \lambda^1 + 1$. Ihre beiden Lösungen sind –g und $\frac{1}{g}$ (d.h. die Eigenwerte der Fibonacci-Matrix). Ferner ist $\lambda = 0$ eine weitere Lösung, die wegen der Division herausgefallen ist.

Die beiden Folgen $\phi_1(n) = \lambda_1^n = (-g)^n$ und $\phi_2(n) = \lambda_2^n = \frac{1}{g^n}$ sind linear unabhängig im Vektorraum der Folgen, denn keine ist ein Vielfaches der andern. Sie spannen den Lösungsraum der Rekursionsformel auf, denn seine Dimension kann nicht grösser als 2 sein, da die beiden Startwerte eine Lösungsfolge vollständig bestimmen.

Eine allgemeine Lösung f_i der Rekursionformel ist eine Linearkombination

$$f_m = c_1 \cdot \lambda_1^n + c_2 \cdot \lambda_2^n$$

Die Koeffizienten c_1, c_2 ergeben sich durch Einsetzen der Startwerte, woraus wiederum die Formel von Binet folgt.

Zu verifizieren bleibt, dass Linearkombinationen von Lösungen der Rekursionsformel ebenfalls Lösungen derselben sind, woraus folgt, dass die Lösungsmenge tatsächlich ein Vektorraum ist:

Für die allgemeine Linearkombination $f_n = c_1 \cdot \lambda_1^n + c_2 \cdot \lambda_2^n$ der beiden Folgen $\phi_1(n)$ und $\phi_2(n)$ folgt

$$f_{n+2} = c_1 \cdot \lambda_1^{n+2} + c_2 \cdot \lambda_2^{n+2} \underset{(*)}{=} c_1 \cdot (\lambda_1^{n+1} + \lambda_1^n) + c_2 \cdot (\lambda_2^{n+1} + \lambda_2^n) =$$

$$\underbrace{c_1 \cdot \lambda_1^{n+1} + c_2 \cdot \lambda_2^{n+1}}_{f_{n+1}} + \underbrace{c_1 \cdot \lambda_1^n + c_2 \cdot \lambda_2^n}_{f_n} = f_{n+1} + f_n$$

Also löst die Folge f_n die Rekursiongleichung, was zu zeigen war.

Die Gleichheit (*) in der obigen Umformung ergibt sich daraus, dass die Folgen $\phi_1(n)$ und $\phi_2(n)$ die Rekursionformel erfüllen. Die erste und letzte Umformung benutzen die Defintion der Rekursionglieder mit den Indizes n+2, n+1 und n.