Leonhard Eulers Konsonanztheorie

Daniel Muzzulini, Zürich 1994 (Musiktheorie 1994, 2, 135-146)

Leonhard Euler (1707-1783) lehnt eine Einteilung der Intervalle in Gegensatzkategorien ab. Die von ihm aufgestellte zahlentheoretische Funktion soll die Komplexität von Intervallen, Akkorden und sogar von harmonischen Fortschreitungen beschreiben. Leibniz' Prinzip vom unbewußten Rechnen der Seele ist hier die psychologische Grundlage des Musikverständnisses.
Euler formuliert in seinen späteren Schriften ein Substitutionsprinzip, wonach beliebige Zusammenklänge auf einfache bzw. einfachere rationale Frequenzverhältnisse zurechtgehört werden. Er ist in diesem Zusammenhang auch für die Einführung der Primzahl 7 in die "musikalische Arithmetik".
Berechnungen in der Art Eulers werden verschiedentlich heute noch verfochten. Unsere kritische Darstellung befaßt sich deshalb auch mit solchen Ansätzen.

1. Eulers Konsonanzbegriff

Euler verwendet den Begriff Konsonanz wie schon Johannes de Garlandia [9] im eigentlichen Wortsinne für beliebige Zusammenklänge. Zweifellos hätte er einen weniger belasteten Begriff einführen können, doch ist es seine Absicht, einen qualitativen Unterschied zwischen Konsonanz und Dissonanz zu hinterfragen:

At quia partim difficile est consonantiarum et dissonantiarum limites definire, partim vero haec distinctio cum nostro tractandi modo minus congruit, quo secundum suavitatis gradus capite II expositos sonos compositos sumus iudicaturi, omnibus sonitibus, qui ex pluribus sonis simplicibus simul sonantibus constant, consonantiae nomen tribuemus. [4, p. 246]

(Aber da es zum einen schwierig ist, die Grenzen der Konsonanzen und Dissonanzen zu bestimmen, zum andern aber diese Unterscheidung mit unserer Behandlungsweise wenig übereinstimmt, wonach wir die zusammengesetzten Klänge gemäss den in Kapitel II dargelegten *gradus suavitatis* zu beurteilen haben, weisen wir allen Klängen, die aus mehreren gleichzeitig erklingenden Tönen bestehen, die Bezeichnung Konsonanz zu.)

Es ist schwierig, d.h. willkürlich, Grenzen festzulegen, denn ein Gegensatzpaar paßt nicht in ein graduelles Wohlklangskonzept. Euler ist wohl der erste, dem völlig klar ist, daß eine auf einer wie auch immer verstandenen Komplexität von Zahlenverhältnissen basierende Intervallbewertung nur eine graduelle sein kann.

2. Definition des Gradus suavitatis

Der Gradus suavitatis soll zunächst als zahlentheoretische Funktion beschrieben werden. Dazu eine mathematische Vorbemerkung. Jede natürlich Zahl n>1 läßt sich als Primzahlpotenz oder als Produkt von Primzahlpotenzen darstellen. Beispielsweise ist $126 = 2^3 \cdot 2 \cdot 7$, $200 = 2^3 \cdot 5^2$, $81 = 3^4$, $19 = 19^1$. Ordnet man die auftretenden Primzahlen der Größe nach, so ist die Darstellung eindeutig, d.h. n kann auf eindeutige Weise in die Form

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{r_s}$$

gebracht werden. Dabei sind $p_1<p_2<\ldots<p_s$ Primzahlen, $r_1, r_2, \ldots, r_s$ und s sind natürliche Zahlen größer oder gleich 1. Diese Darstellung von n heißt die Primfaktorzerlegung von n.
Ausgehend von der Primfaktorzerlegung wird der Graduswert (Gradus suavitatis) wie folgt definiert:

$$\Gamma(n) = (p_1-1)r_1 + (p_2-1)r_2 + \ldots + (p_s-1)r_s + 1.$$

Ferner wird $\Gamma(1) = 1$ gesetzt.
Daraus lassen sich leicht folgende Spezialfälle ableiten:
Für eine Primzahl p ist $\Gamma(p)=p$.
Für eine Primzahlpotenz p^r ist $\Gamma(p^r)=(p-1)r+1$ insbesondere also $\Gamma(2^r)=r+1$.
Für ein Produkt zweier beliebiger natürlicher Zahlen gilt $\Gamma(ab)=\Gamma(a)+\Gamma(b)-1$.
Der für die Musik wichtige Fall $n=2^u \cdot 3^v \cdot 5^w$ ergibt $\Gamma(n)=u+2v+4w+1$.
Beispiel: $60=2^2 \cdot 3 \cdot 5$ also $\Gamma(60)=2+2 \cdot 1+4 \cdot 1+1=9$ (u=2, v=1, w=1).

Der Gradus suavitatis stellt eine Bewertung der Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen dar. Der Graduswert ist umso größer, je größer die auftretenden Primzahlen und je größer deren Exponenten sind. Aus m>n folgt aber nicht automatisch $\Gamma(m)>\Gamma(n)$. So ist beispielsweise $\Gamma(34)=18$, $\Gamma(35)=11$, $\Gamma(36)=7$ [1)].

Der Graduswert einer Proportion wird wie folgt bestimmt: Man schreibt die Proportion in gekürzten natürlichen Zahlen. Von diesen wird das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) berechnet. Dieses kgV wird von Euler *Exponent* der Proportion genannt. Der Graduswert der Proportion ist dann als Graduswert ihres Exponenten definiert. Damit kann allen Zusammenklängen, denen rationale Grundfrequenzverhältnisse zugrunde liegen, ein Graduswert zugeschrieben werden.

Beispiele:
1) $16 : 24 = 2 : 3$, $\text{kgV}(2,3)=6$, $\Gamma(6)=4$
2) $440 : 550 : 660 = 4 : 5 : 6$, $\text{kgV}(4,5,6)=60$, $\Gamma(60)=9$
3) $1/4 : 1/5 : 1/6 = 15 : 12 : 10$, $\text{kgV}(15,12,10)=60$, $\Gamma(60)=9$
4) $440 : 550 : 661$. Da 661 eine Primzahl ist, kann diese Proportion nicht gekürzt werden. Ihr kgV ist $n=2^3\cdot5^2\cdot11\cdot661$ und $\Gamma(n)=3+4\cdot2+10+660+1=682$.

Dur- und Molldreiklang (Beispiele 2 und 3) verweisen auf einen allgemeinen Sachverhalt: Akkorde, die durch Umkehrung an einer Tonhöhe ineinander übergehen, haben den gleichen Graduswert. Die Gradusfunktion respektiert damit das duale Prinzip, das später von Arthur von Oettingen und Hugo Riemann vertreten worden ist.
Beispiel 4) zeigt den Einfluss einer geringfügigen Verstimmung von 2). Darauf ist in Zusammenhang mit Eulers These des Zurechthörens noch einzugehen (Kap. 6).

3. Die Bedeutung der Gradusfunktion

Ein Zusammenklang ist nach Euler umso schwerer zu verstehen, je größer der Graduswert der zugehörigen Proportion ist. Es liegt aus der Sicht der herkömmlichen Konsonanz/Dissonanz-Auffassung auf der Hand, große Graduswerte mit Dissonanzen und kleine Graduswerte mit Konsonanzen in Verbindung zu bringen:

Dissonantiae enim ad altiores pertinent gradus, et pro consonantiis habentur, quae ad inferiores gradus pertinent. Ita tonus, qui constat sonis rationem 8 : 9 habentibus et ad octavum gradum est relatus, dissonantiis anumeratur, ditonus vero seu tertia maior ratione 4 : 5 contentus, qui ad septimum gradum pertinet, consonantiis. Neque tamen ex his octavus gradus initium potest constitui dissonantiarum; nam in eodem continentur rationes 5 : 6 et 5 : 8, qua dissonantiis non accensentur. [4, p. 250]

(Die Dissonanzen gehören zu höheren Graden, und für Konsonanzen werden diejenigen gehalten, die zu tieferen Graden gehören. So wird der Ganzton, der aus Tönen im Verhältnis 8 : 9 besteht und zum achten Grad gehört, zu den Dissonanzen gezählt, der Ditonus aber (die große Terz), der im Verhältnis 4 : 5 enthalten ist, welcher zum siebten Grad gehört, wird zu den Konsonanzen gezählt. Und trotzdem kann aus diesem achten Grad nicht der Anfang der Dissonanzen festgelegt werden; denn in demselben sind die Verhältnisse 5 : 6 und 5 : 8 enthalten, welche nicht zu den Dissonanzen gerechnet werden.)

Eulers Gradusfunktion erlaubt es nicht, durch Festlegung einer Grenze, die zeitübliche Einteilung der Intervalle in Konsonanzen und Dissonanzen zu reproduzieren.
Die Tatsache, daß Ganzton, kleine Terz und kleine Sexte den gleichen Graduswert haben, veranlaßt Euler nicht dazu, seine Gradusfunktion zu modifizieren, obschon dies möglich wäre.
Die einfachere zahlentheoretische Funktion $\Gamma'(n) = p_1r_1+p_2r_2+...+p_sr_s$ erlaubt nämlich die Trennung von imperfekten Konsonanzen und Ganztönen. Als größter Konsonanzen entsprechender Funktionswert wäre hier 11 anzusetzen. Dann würden aber auch die kleine Septim 5 : 9 und die Naturseptim 4 : 7 mit gleichem Wert wie die kleine Sexte zu Konsonanzen, nicht aber die kleine Septim 9 : 16 [2)]. Eulers Gradusfunktion hat dagegen die Eigenschaft, daß die Werte der "Siebenerintervalle" alle größer als 8 sind.
Selbstverständlich können durch Änderungen an zahlentheoretischen Funktionen und an den Grenzen auch völlig andere Einteilungen aufgestellt werden (vgl. Kap. 7).
Bemerkenswert modern erscheint mir Eulers Begründung für die Inkongruenz der Gradusfunktion mit der Einteilung der Intervalle in Konsonanzen und Dissonanzen:

Hanc rem autem attentius perpendenti constabit dissonantiarum et consonantiarum rationem non in sola perceptionis facilitate esse quaerendam, sed etiam ad totam componendi rationem spectari debere. Quae enim consonantiae in concentibus minus commode adhiberi possunt, eae dissonantiarum nomine sunt appelatae, etiamsi forte facilius percipiantur quam aliae, quae ad consonantias referuntur. [4, p. 250]

(Durch gründliche Erwägung dieser Sache steht fest, daß das Verhältnis der Dissonanzen zu den Konsonanzen nicht allein in der Einfachheit der Wahrnehmung zu suchen ist, sondern daß auch die ganze Kompositionslehre zu betrachten ist. Diejenigen Konsonanzen nämlich, welche in Zusammenklängen weniger bequem angewendet werden können, werden mit der Bezeichnung der Dissonanzen versehen, auch wenn sie viel leichter wahrgenommen werden als andere, die zu den Konsonanzen gerechnet werden.)

Während die Gradusfunktion auf der wahrnehmungspsychologischen Ebene die Komplexität von Zusammenklängen erfassen soll, ist das Denken in den Gegensätzen Konsonanz und Dissonanz darüber hinaus im satztechnischen Kontext verwurzelt. Dadurch lasse sich erklären, weshalb der Ganzton und die Quarte, obschon sie einfach wahrzunehmen sind, zu den Dissonanzen gerechnet werden [4, p. 250]. Eulers Argument ist allerdings ziemlich vage. Denn wie sich die "bequeme Verwendbarkeit in Zusammenklängen" satztechnisch konkretisieren läßt, wird nicht ausgeführt.
Inwieweit die *componendi ratio*, als Lehre des Komponierens verstanden, für Euler auch eine historische Komponente des Konsonanz/Dissonanz-Denkens miteinschließt, muß hier offen bleiben.

Außergewöhnlich ist die sich aus der Definition der Gradusfunktion ergebende Beurteilung der Oktaverweiterungen. Während von den Theoretikern Tinctoris [18] und Zarlino [21] an, gewöhnlich die Oktaverweiterungen die Klassifikation der Intervalle invariant lassen, wirkt sich die Oktaverweiterung verschiedener Intervalle unterschiedlich auf die Graduswerte aus. Falls nämlich die kleinere Zahl einer (gekürzten) Proportion gerade ist, vermindert sich der Gradus suavitatis um 1, andernfalls erhöht er sich um 1:

große Terz	$\Gamma(4 : 5) = 7$	große Dezim	$\Gamma(2 : 5) = 6$
große Sexte	$\Gamma(3 : 5) = 7$	große Tredezim	$\Gamma(3 : 10) = 8$

In Zusammenhang mit der Beurteilung der Oktaverweiterungen hat zwischen Rameau und Euler ein kurzer Briefwechsel stattgefunden, vgl. [10].

Ferner ist für irrationale Proportionen wie $1 : 2^{7/12}$ (die wohltemperierte Quinte) kein Graduswert definiert. Sinngemäß müsste man irrationalen Proportionen den Graduswert ∞ zuordnen, denn vom Standpunkt der kleinen ganzen Zahlenverhältnisse sind sie unendlich kompliziert. (Je größere Zahlen man in einer ganzzahligen Proportion zuläßt, desto besser lassen sich irrationale Proportionen annähern.)

Das grundsätzliche Problem an Eulers Gradusfunktion liegt darin, daß die Wahrnehmung von Klängen als "Rechenkunststück der Seele" mißverstanden wird. Die Seele soll nämlich zuerst die wahrgenommene Proportion kürzen und ein kgV berechnen, was vielleicht noch in Verbindung mit der Wahrnehmung der Periodizität des zusammengesetzten Schallsignals geschehen könnte[3)]. Dann aber wird ihr die Erstellung einer Primfaktorzerlegung zugemutet. Die sich daran anschliessende Berechnung des Graduswertes verwendet alle Information aus der Primfaktorzerlegung. Deshalb kann keiner dieser Rechenschritte weggelassen werden!

4. Intervalle und Akkorde

Zu hinterfragen ist Eulers grundsätzliche Gleichstellung von Intervallen und Akkorden. Die Komplexität eines Akkordes wird nicht aus der Komplexität der ihm zugrundeliegenden Intervalle ermittelt, sondern über das kgV des Gesamtklanges. Dieses kgV braucht nicht gleich dem Maximum der kgV der beteiligten Intervalle zu sein, was man sich am Durdreiklang klarmachen kann:

kgV(4,5,6)=60,

kgV(4,5)=20, kgV(2,3)=6, kgV(5,6)=30.

Nach Eulers Berechnung hat der Durdreiklang die gleiche Komplexität 9 wie die dissonanten Intervalle 4 : 7, 5 : 9 und 9 : 16, obschon der größte auftretende Graduswert der beteiligten Intervalle 8 ist.

Eulers Berechnungsweise hat ferner zur Folge, daß eine Proportion unter Wahrung des Graduswertes zur sogenannten *vollständigen Konsonanz* ergänzt werden kann. Diese lautet für den Durdreiklang 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 10 : 12 : 15 : 20 : 30 : 60. Mit der Identifikation 4=c folgt, daß der Durdreiklang c-e-g den gleichen Graduswert wie der Klang c-e-g-e'-g'-h' hat, der durch Überlagerung des C-Dur-Dreiklangs mit dem e-moll-Dreiklang der folgenden Oktave entsteht.

Ausserdem sind Durdreiklang 4 : 5 : 6 und Molldreiklang 10 : 12 : 15 nicht die einfachsten Akkorde aus drei Tönen innerhalb des Oktavraums: Die Akkorde 6 : 8 : 9 (g-c'-d') und 8 : 9 : 12 (c'-d'-g') haben den Graduswert 8 [4)].

An der vollständigen Proportion zum kgV 60 kann abgelesen werden, daß Durdreiklang in Grund- und Quartsextstellung sowie Molldreiklang in Grundstellung und als Sextakkord gleiche Graduswerte haben. Hingegen gehören Dursext- und Mollquartsextakkord zum kgV 120 und haben somit Graduswert 10. Helmholtz' Untersuchungen, die Kombinationstöne einbeziehen, ergeben vergleichbare Unterschiede [7, p. 350-355].

Ein weiteres Problem stellen die leitereigenen Septakkorde der diatonischen Skala in reiner Stimmung dar. Der Dominantseptakkord 36 : 45 : 54 : 64 mit kgV 8640 und Graduswert 17 ist als gleich kompliziert anzusehen wie 32 : 36 :

40 : 45 : 48 : 54 : 60 : 64, ein "Cluster", der eine ganze Oktave der diatonischen Skala enthält (f-g-a-h-c'-d'-e'-f' bei der Identifikation c'=48). Dies hängt damit zusammen, daß der Dominantseptakkord eine diatonische Skala eindeutig festlegt, eine Erklärung d'Alemberts, die von Euler abgelehnt wird [5, p. 510]. Der Mollseptakkord 10 : 12 : 15 : 18 (a-c'-e'-g' mit c'=12) hat kgV 180 und Graduswert 11, und der Durdreiklang mit großer Septim 8 : 10 : 12 : 15 (c-e-g-h mit c=8) hat kgV 120 und Graduswert 10. Auch bei den Septakkorden korrespondiert Eulers "Wahrnehmungs-Komplexität" offenbar nicht mit ihrer Unbeliebtheit.

5. Klangsukzessionen

Eulers Anwendung der Gradusfunktion auf Sukzessionen von Klängen nach dem gleichen Muster wie bei Mehrklängen, d.h. mittels Berechnung des kgV des Gesamtereignisses, ist bedenklich. Obschon Busch den fundamentalen Mangel erkennt "Γ ist invariant gegen Tonvertauschungen aus benachbarten Konsonanzen" [2, p. 55], glaubt er mit Hilfe von Eulers Berechnungen noch gewisse Satzregeln des Kontrapunktes ableiten zu können [2, p. 58].
Eine eher vertretbare Methode wäre das Legen von "Karten" im Sinne von [13] zur Gewinnung von mehreren Kennzahlen, die eine Fortschreitung charakterisieren (Abb. 1).

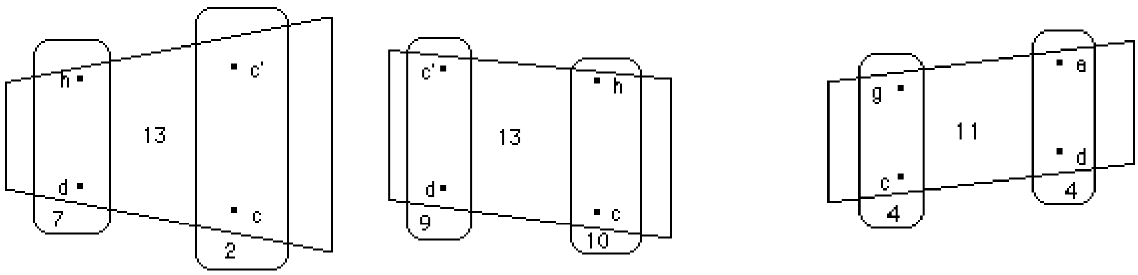

Abb. 1. Die ersten beiden Fortschreitungen weisen nach Eulers Berechnung den gleichen Graduswert 13 auf (Permutation der Töne). Die Berücksichtigung aller Kennzahlen erlaubt aber eine Differenzierung. Das dritte Beispiel, eine Quintenparallele, zeigt, daß die Fortschreitungen, bei welchen alle Kennzahlen klein sind, nicht die kontrapunktisch besten zu sein brauchen.

6. Die These des Zurechthörens

Wegen der unbefriedigenden Situation bei den Septakkorden und der Störungsanfälligkeit der Gradusfunktion auf kleinste Verstimmungen ist Euler in den späteren Schriften offenbar zur Auffassung gelangt, die rechnende Seele sei in der Lage, die intendierten Zahlenproportionen und nicht die real erklingenden zu beurteilen. Als Beispiel führt er die weitgehende Ununterscheidbarkeit der wohltemperierten von der reinen Quinte an [5, p. 511]. Die Quinte $1 : 2^{7/12}$ ist auf eine als 2 : 3 intendierte Quinte zurechtzuhören.
Ebenso werde selbst der exakt ausgeführte Dominantseptakkord 36 : 45 : 54 : 64 mit kgV 8640 als anders gemeinter aufgefaßt, nämlich als 36 : 45 : 54 : 63, d.h. 4 : 5 : 6 : 7 [5, p. 514]. Der Dominantseptakkord führt Euler also zur "Postulierung der Primzahl 7 für die Musiktheorie". Der Exponent der neuen Proportion sei nun 420 und erlaube keine "Interpolation" zu einem ganzen Cluster [5, p. 514]. In der vollständigen Konsonanz liegen aber immerhin fünf Töne innerhalb einer Oktave (12 : 14 : 15 : 20 : 21). Der Gradus suavitatis hat sich im übrigen nur um 2 auf 15 vermindert. Den gleichen Graduswert hat der auf der vierten Stufe in melodischem Moll der reinen Stimmung leitereigene Septakkord 20 : 25 : 30 : 36 mit kgV 900. (Mit diesen Verhältniszahlen wird der Dominantseptakkord von Rameau beschrieben [16].) Die Größe des Graduswertes beim Dominantseptakkord legitimiert also keineswegs die Einführung der Primzahl 7.
In ähnlicher Weise interpretiert Euler den Mollseptakkord 27 : 32 : 40 : 48 der zweiten Stufe in Dur als 28 : 32 : 40 : 48 d.h. 7 : 8 : 10 : 12 [6, p. 526f]. Diese Proportion ist klanglich identisch mit einem Dominantsekundakkord auf der vierten Stufe in Eulers Sinn. Das Intervall des Zurechthörens liegt hier bereits in der Größenordnung eines Vierteltons! Auch Busch ist diese Deutung unplausibel. Er schlägt den Mollseptakkord 10 : 12 : 15 : 18 (leitereigen auf der dritten und sechsten Stufe in reingestimmtem Dur) als Zurechthörklang vor [2, p. 127].

Eulers Überlegungen zum Zurechthören sind in mehrfacher Hinsicht problematisch. Zunächst fehlt die Angabe einer klaren Schranke für Zurechthörbereiche. Euler begnügt sich mit der qualitativen Bemerkung, daß Oktave und Quinte kleinere Verstimmungen als die komplizierteren Intervalle zulassen [5, p. 512f]. Die größere Toleranz bei den komplizierteren Intervallen erscheint widersinnig im Hinblick auf Gradusberechnungen der Seele, denn die Vieldeutigkeit nimmt mit der größeren Toleranz zu. Die schwierigere

Gradusberechnung ist dann mit einem schwierigeren Zurechthörvorgang kombiniert.
Im weiteren verpaßt es Euler, das Arsenal der erlaubten Zurechthörintervalle festzulegen. Denkbar wäre etwa eine Einschränkung auf Intervalle der reinen Stimmung. Das Problem der Vieldeutigkeit wird dadurch allerdings nicht behoben, was im folgenden kurz ausgeführt werden soll. Im Tonsytem der reinen Stimmung können alle Intervalle als Kombination der Basisintervalle Oktave (1 : 2), reine Quinte (2 : 3) und reine große Terz (4 : 5) erhalten werden. Beispielsweise ergibt sich die große Sexte 3 : 5 als Oktave - Quinte + große Terz, der Ganzton 8 : 9 als 2·Quinte - Oktave. Da in den Basisintervallen nur die Prinfaktoren 2, 3 und 5 vorkommen, kommen in den Kombinationen dieser Intervalle ebenfalls nur die Primfaktoren 2,3 und 5 vor. (Addieren von Intervallen entspricht Multiplikation von Proportionalitätsfaktoren.) Ein beliebiges Intervall der reinen Stimmung kann deshalb durch eine rationale Zahl der Form $2^u \cdot 3^v \cdot 5^w$, wobei u,v und w ganze Zahlen sind, charakterisiert werden. So bedeutet $2^{-3} \cdot 3^2 \cdot 5^0$= **Error!**= **Error!**den (großen) Ganzton, $2^0 \cdot 3^{-1} \cdot 5^1$ = **Error!** die große Sexte, $2^{-4} \cdot 3^4 \cdot 5^{-1}$ = **Error!**= **Error!**das syntonische Komma. Es kann bewiesen werden, daß jede positive reelle Zahl durch geeignete Wahl der Exponenten u, v und w mit beliebiger Genauigkeit durch eine Zahl der Form $2^u \cdot 3^v \cdot 5^w$ angenähert werden kann [13, p. 304, p. 311]. In der Nähe einer Proportion gibt es demnach beliebig viele Intervalle der reinen Stimmung, und da dabei die Exponenten u, v und w beliebig groß werden können, treten durch minimste Aenderung der Intervallgröße beliebige Schwankungen der Graduswerte auf. Dies illustriert auch die Unmöglichkeit, ausgehend vom Tonsystem der reinen Stimmung, die Gradusfunktion in stetiger Weise auf beliebige Proportionen zu erweitern. Erst wenn man sich auf einen willkürlich gewählten endlichen Ausschnitt des Tonsystems der reinen Stimmung beschränkte, wäre dies möglich.
Natürlich wird die Vieldeutigkeit noch größer, wenn, wie von Euler gefordert, als weiteres Basisintervall die Naturseptime 4 : 7 zugelassen wird. Zu betrachten sind dann rationale Zahlen der Form $2^u \cdot 3^v \cdot 5^w \cdot 7^t$, wobei u, v, w und t ganze Zahlen sind.
Es wäre naheliegend, den Zurechthörvorgang als Minimierung des Graduswertes unter Vorgabe einer Zurechthörtoleranz zu interpretieren. Am Beispiel des Dominantseptakkord läßt sich zeigen, daß dabei der Akkord mit minimalem Graduswert nicht eindeutig festgelegt zu sein braucht. Setzt man nämlich 64/63 als maximale Zurechthörtoleranz fest, so sind für den leitereigenen Dominantseptakkord 36 : 45 : 54 : 64 sowohl 36 : 45 : 54 : 63 =

4 : 5 : 6 : 7 als auch 36 : 45 :54 : 64.8 = 20 : 25 : 30 : 36 erlaubte Kandidaten. Beide haben den Gradus suavitatis 15, und das Zurechthörintervall hat die gleiche Größenordnung. Die These des Zurechthörens fordert neben den bereits genannten algebraischen Fähigkeiten von der Seele auch die Lösung eines unklar definierten Minimierungsproblems. Wie der Vergleich real erklingender Frequenzverhältnisse mit den erst noch zu ermittelnden in Frage kommenden ganzzahligen Proportionen und die Bestimmung und Minimierung der zugehörigen Graduswerte in Echtzeit geleistet werden sollen, ist mir ein Rätsel.

7. Modifikationen der Konsonanzgradberechnung von Euler

7. 1. Klarentz Barlow 1986 [1]

Eulers Gradusfunktion hat immer wieder Anlaß zu zahlentheoretischen Spielereien gegeben. Barlow definiert eine "Unverdaulichkeitsfunktion" (Terminologie Barlows!) wie folgt:

$$\xi(N) := 2\sum_{j=1}^{k}\frac{n_j(p_j - 1)^2}{p_j} \quad \text{mit } N = \prod_{j=1}^{k} p_j^{n_j} \text{ (Primfaktorzerlegung)}$$

Der Ausdruck $\xi(N)$ ist so konstruiert, daß für die Primzahlen ≥ 7 im Vergleich zu den Primzahlen 2, 3 und 5 hohe Werte resultieren. Es gilt $\xi(2^n) = n$. Ähnlich wie bei Euler bewirkt also die Multiplikation mit 2 eine Erhöhung des Funktionswertes um 1. Die Formel ist im wesentlichen von der gleichen Gestalt wie bei Euler. Dort war f(p)=p-1, hier ist $f(p)=2(p-1)^2/p$ zu wählen. Klösch dagegen wählt $f(p)=(ld(p))^2$ (ld=Logarithmus zur Basis 2) [11,p.175].

Barlows "Harmonizität" ist eine aus der "Unverdaulichkeit" abgeleitete Größe für Intervalle:

$$h(P,Q) := \frac{\operatorname{sign}(\xi(P) - \xi(Q))}{\xi(P) + \xi(Q) + 2\xi(ggT(P,Q))} \qquad \text{wobei } \operatorname{sign}(x)= \begin{matrix} +1 \text{ für } x > 0 \\ -1 \text{ für } x < 0 \end{matrix}$$

Die Funktion h hat mathematisch wenig erbauliche Eigenschaften. Es ist h(P,Q) = -h(Q,P). Es ist unverständlich, weshalb der Funktionswert bei Umkehrung der Reihenfolge einer Proportion ändern soll. Setzt man voraus, daß P kleiner als Q zu wählen ist, so drückt das negative Vorzeichen beim Wert von h nur aus, daß der "Unverdaulichkeitswert" von P größer als derjenige von Q ist.

Wird für P und Q eine gekürzte Proportion eingesetzt (P,Q teilerfremd), so fällt der letzte Summand unter dem Bruchstrich weg, denn $\xi(1) = 0$. Dieser Term ist aber nicht so eingerichtet, daß er den Effekt des Kürzens einer Proportion kompensiert. Sind P und Q nicht teilerfremd, so braucht ihre "Harmonizität" nicht die gleiche wie diejenige der gekürzten Proportion zu sein, wie folgendes einfache Zahlenbeispiel zeigt :

$$h(4,\,2) = \frac{\operatorname{sign}(\xi(4) - \xi(2))}{\xi(4) + \xi(2) + 2\xi(2)} = \frac{1}{5} \quad \text{aber} \quad h(2,\,1) = \frac{1}{\xi(2) + \xi(1)} = \frac{1}{1} = 1$$

Zum Glück berechnet Barlow die Harmonizität anhand gekürzter Proportionen! Setzt man vernünftigerweise voraus, daß P und Q teilerfremd sind, vereinfacht sich die Definition von h zu

$$h(P,\,Q) = \frac{\pm 1}{\xi(P) + \xi(Q)} = \frac{\pm 1}{\xi(P\cdot Q)} \quad \text{(wobei ggT(P,Q) = 1).}$$

"Harmonizität" ist somit der Kehrwert der "Unverdaulichkeit" des Produktes der gekürzten Verhältniszahlen. Sie entspricht damit dem Kehrwert von Eulers Gradusfunktion. Es erscheint mir als Verwirrspiel, daß Barlow in seiner Darstellung nicht von dieser einfachen Formel ausgeht und diese nicht einmal erwähnt.

Barlow verwendet die Harmonizität zur Berechnung optimaler Skalen (er nennt dieses Verfahren Rationalisierung), indem er maximale "Gesamtharmonizität" der innerhalb einer Oktave auftretenden Intervalle der Skala verlangt. Ausgehend von der 12-temperierten Durskala beispielsweise ist bei einer geeigneten Stimmtoleranz und Mindestharmonizität die gebräuchliche Durskala der reinen Stimmung die beste Rationalisierung [5)].

Barlows Abgrenzung gegenüber psychologischen Implikationen aus seinen Berechnungen ist entlarvend:

"An dieser Stelle soll gesagt werden, daß die hier beschriebene Vorgehensweise eine synthetische und keine analytische ist: eine Methode zur Handhabung von Intervallen und deren Rationalisierung wird aufgestellt, deren Ergebnisse nach musikalischer Vernunft und Erfahrung befriedigen sollen. Dies ist also kein Angebot einer Erklärung darüber, wie die Psyche funktioniert, obgleich das behandelte Thema in dieser verankert ist." [p. 2]

7. 2. <u>Martin Vogel 1988</u> [20]

Vogel ist die Eulersche Berechnung zu kompliziert. Er schlägt vor, die Primzahlen in der Eulerschen Gradusfunktion mit p und nicht mit p-1 zu gewichten. Bei den Zweierpotenzen macht er aber, da auf diese Weise für ihn zu große Zahlenwerte für die Oktave und ihre Vielfachen herauskommen, eine Ausnahme und gewichtet sie mit 1. Als zahlentheoretische Funktion ergibt sich:

$$\Gamma_{\mathrm{Vogel}}(N) := n + \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot n_i, \quad \text{wobei } N = 2^n \cdot \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i} \text{ und } p_i \text{ Primzahlen } \square 3. \qquad p_i \geq 3$$

Sie ist wie auch die Funktionen von Barlow und Klösch (s.o.) vom gleichen Typ wie diejenige Eulers.
Vogel stellt fest, daß Eulers Gradusfunktion für Akkorde ungünstige Werte ergibt und wendet auch hier eine eigene Berechnungsweise an. In der gekürzten fortlaufenden Proportion ist das arithmetische Mittel der Γ_{Vogel}-Werte der Verhältniszahlen zu nehmen.
Für den großen Durseptimenakkord 8 : 10 : 12 : 15 erhält er beispielsweise den tiefen Graduswert $\Gamma_{Vogel} = 0.25 \cdot (3 + 6 + 5 + 8) = 5.5$. Schon eine oberflächliche Betrachtung zeigt, daß Vogels Berechnung "musikalisch" unvernünftige Konsequenzen hat. So ist für den Durdreiklang $\Gamma_{Vogel}(4 : 5 : 6) = 3.667$ aber für den Molldreiklang $\Gamma_{Vogel}(10 : 12 : 15) = 6.333$. Dieser Wert ist sogar höher als derjenige des obigen Septakkordes, der einen Molldreiklang enthält!
Hätte Vogel seinen Wert für die Akkorde hingegen als arithmetisches Mittel, der Γ_{Vogel}-Werte aller Intervalle, die im Akkord vorkommen, festgelegt, so wäre die duale Eigenschaft der Eulerschen Gradusfunktion, daß Akkorde die durch Spiegelung an einer Tonhöhe ineinander übergehen, die gleichen Graduswerte haben, erhalten geblieben.

7. 3. Hermann Busch 1970 [2]

Einen in eine andere Richtung zielenden Vorschlag der Modifaktion der Gradusfunktion macht Hermann Busch in seiner Dissertation [2]. Er versucht den Einbezug von Obertönen und ergänzt die fortlaufende Proportion eines Akkordes durch alle Zahlen, die Obertönen von Akkordtönen entsprechen und kleiner als das kgV der gekürzten Proportion sind. Von dieser neuen fortlaufenden Proportion wird der gewöhnliche Gradus suavitatis bestimmt. [p. 47-49]
Für den Durdreiklang ergibt sich beispielsweise die fortlaufende Proportion 4 : 5 : 6 : 8 : 10 : 12 : 15 : 16 : 18 : 20 : 24 : 25 : 28 : 30 : 32 : 35 : 36 : 40 : 42 : 44 : 45 : 48 : 50 : 52 : 54 : 55 : 56 : 60. Das kgV ist $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ und der Graduswert Γ^* somit $1+5 \cdot 1+3 \cdot 2+2 \cdot 4+6+10+12=48$. Der Molldreiklang hingegen ergibt nur die Proportion 10 : 12 : 15 : 20 : 24 : 30 : 36 : 40 : 45 : 48 : 50 : 60 mit kgV $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ und $\Gamma^*=1+4 \cdot 1+2 \cdot 2+2 \cdot 4=17$. Busch der diese Diskrepanz auch bemerkt und sie auf die "physikalisch nicht mehr sinnvolle Einbeziehung der elften und dreizehnten Partialtöne" [p. 48] zurückführt, nimmt dies nicht als Anlaß, seine Berechnungen aufzugeben oder zu modifizieren. (Es ist anzumerken, daß auch bei Weglassung der Obertöne ab der elften Ordnung

nach Buschs Berechnung für den Durdreiklang ein höherer Wert als für den Molldreiklang resultiert.) Mit dem Hinweis auf den physikalisch wenig sinnvollen Einbezug von Partialtönen höherer Ordnung, gäbe sich Busch ein Mittel in die Hand, eine physikalisch "sinnvollere" Berechnung anzustellen, nämlich eine Gewichtung der Partialtöne im Verhältnis zu ihrer Intensität in den Spektren. Eine solche Bewertung von Zusammenklängen wäre dann abhängig von der Klangfarbe wie Helmholtz' Rauhigkeit aber nicht von der Lage im Frequenzbereich.

8. Schlußbemerkung

Eulers Bestrebungen, die Komplexität von Zusammenklängen quantitativ zu erfassen, zeigen in deutlichster Weise die Problematik einer begrifflichen Bestimmung von einfachen und komplizierten Zahlenverhältnissen. Noch für Zarlino ist die Größe der involvierten Zahlen das charakterisierende Unterscheidungsmerkmal zwischen kompliziert und einfach. Von den Pythagoreern ist übrigens durch Ptolomäus eine zahlentheoretische Konsonanzgradberechnung überliefert $\gamma(a : b) = (a-1) +(b-1)$, falls a und b teilerfremd sind, vgl. [14, p. 73f]. Bei Euler ist dagegen die Komplexität mit der Primfaktorzerlegung und nicht primär mit der Größe der Verhältniszahlen assoziiert. Die Annahme, daß größere eingehende Primzahlen und höhere Primzahlexponenten die Komplexität erhöhen, ist in Hinsicht auf das Tonsystem der reinen Stimmung vernünftig. Jede zahlenmäßige Gewichtung dieser Aspekte ist jedoch willkürlich. Es ist in diesem Zusammenhang noch einmal darauf hinzuweisen, daß Euler nicht eine numerologische Reproduzierung des Konsonanz/Dissonanz-Gegensatzes intendiert hat. Vielmehr hat er den qualitativen Gegensatz der beiden Kategorien aufgrund von Zahlenverhältnissen in Frage gestellt. Es stört ihn deshalb nicht, daß seine Gradusfunktion aus der Perspektive eines qualitativen Gegensatzes teilweise unplausible Resultate gibt. Daß die Benennung seiner zahlentheoretischen Funktion als Gradus *suavitatis* zu Mißverständnissen geführt hat, ist aber nicht verwunderlich.

Die Idee des Zurechthörens ist nicht neu. Bei Theinred von Dover [17] und Walter Odington [15] dient das Argument des Zurechthörens auf superpartikuläre Verhältnisse als Erklärung für die angenehme Wirkung der pythagoreischen Terzen. Spätestens mit der Einführung von temperierten Stimmungen, also auch schon bei Zarlino und Vicentino, vgl. [12], muß der

Zurechthörgedanke auf rationale Verhältnisse als implizit akzeptiert gelten, denn die Musiktheorie der Zeit hat keine direkte Erklärung für die Konsonanz der temperierten Intervalle, die ja irrationale Frequenzverhältnisse ergeben.
Die wahrnehmungspsychologische Tatsache, daß geringfügige Abweichungen in der Intonation von Intervallen und Akkorden nicht wahrnehmbar sind, legt in der Tat die Annahme eines Zurechthörvorgangs nahe, sobald sensorisch ununterscheidbare Phänomene zu Klassen zusammengefaßt werden sollen. Die Frage, ob dabei rationale oder irrationale Zahlenverhältnisse als Richtgrößen zu dienen haben, wird dabei aber hinfällig. Man kann genausogut ein Zurechthören bezüglich der 12-temperierten Stimmung postulieren. Euler der zeitlebens ein Verfechter der reinen Stimmung blieb, hat diese Konsequenz nicht gezogen. Auch in neuerer Zeit wird der Zurechthörgedanke bezüglich einfacher Zahlenproportionen oft unreflektiert verwendet, so z.B. [14, p. 99], [19, p. 148].

Die vorgestellten anderen Konsonanzgradberechnungen bringen kaum neue Erkenntnisse. Sie ergeben zwar innerhalb der Oktave eher die gewünschte Rangreihenfolge. Alle anderen bei Euler aufgezeigten Schwierigkeiten bleiben aber bestehen. Eine Ausnahme ist vielleicht Vogels Ansatz zur Behandlung der Akkorde aus den sie konstituierenden Intervallen, die Ausführung ist aber mangelhaft. Unglücklicherweise stützt sich Hesse auf Vogels Akkordberechnungen [8, p.34].
Das Verlangen, Phänomene mittels griffiger Formeln zu beschreiben, erinnert an die Suche der Physiker nach der Weltformel. Was dabei in unserem Fall herauskommt, kann nur ein oberflächliches Verständnis sein. Es besteht die Gefahr, diese Formeln mit Einsichten in die gehör- und neurophysiologische Verarbeitung von Klängen zu verwechseln.

Bibliographie

[1] Klarentz Barlow: *Über die Rationalisierung einer harmonisch irrationalen Tonhöhenmenge* (ms)

[2] Hermann R. Busch: *Leonhard Eulers Beitrag zur Musiktheorie*. Kölner Beiträge zur Musikforschung Bd. 58, Gustav Bosse Verlag, Regensburg 1970

[3] Leonhard Euler: *Commentationes Physicae*. Ed. E. Bernoulli et al.: Leonhardi Euleri Opera Omnia. Series Terrtia. Opera Physica. Volumen Primum, Teubner 1926

[4] Leonhard Euler: *Tentamen novae theoriae musicae*. [3, p. 197-427] Petersburg 1739

[5] Leonhard Euler: *Conjecture sur la raison de quelques dissonances generalement reçues dans la musique*. [3, p. 508-515] Berlin 1764

[6] Leonhard Euler: *Du veritable caractere de la musique moderne*. [3, p. 516-539] Berlin 1764

[7] Hermann von Helmholtz: *Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik*. 5. Auflage, Verlag Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig 1896

[8] Horst-Peter Hesse: *Die Sonanz als Basis der Harmonik in mikrotonaler Musik*. Mikrotöne III, hg. Horst-Peter Hesse, Edition Helbling, Innsbruck 1990, p. 29-39

[9] Johannes de Garlandia: *De Mensurabili Musica. Kritische Edition mit Kommentar und Interpretation der Notationslehre*, hg. Erich Reimer, Beihefte zum Archiv für Musikwissenschaft, Bd. X, XI

[10] Michaela Maria Keane: *The Theoretical Writings of Jean-Philippe Rameau*. Diss., The Catholic University of America Press, Washington 1961

[11] Gerhard Klösch: Periodenstrukturen als Grundlage einer mathematisch fundierten Harmonielehre. Mikrotöne III, hg. Horst-Peter Hesse, Edition Helbling, Innsbruck 1990, p. 169-182

[12] Mark Lindley: *Stimmung und Temperatur*. in Geschichte der Musiktheorie Bd. 6 , ed. Frieder Zaminer, Hören, Messen und Rechnen in der frühen Neuzeit, Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt 1987, p. 109-332

[13] Guerino Mazzola: *Geometrie der Töne. Elemente der Mathematischen Musiktheorie*. Unter Mitarbeit von D. Muzzulini und einem Beitrag von G. R. Hoffmann Birkhäuser Verlag, Basel 1990

[14] Barbara Münxelhaus: *Pythagoras musicus. Zur Rezeption der pythagoreischen Musiktheorie als quadrivialer Wissenschaft im lateinischen Mittelalter*. Verlag für systematische Musikwissenschaft, Bonn - Bad Godesberg 1976

[15] Walter Odington: *Summa de speculatione musicae*. Ed. Frederick F. Hammond, American Institute of Musicology, 1970

[16] Jean-Philippe Rameau: *Traité de l'harmonie réduite à ces principes naturels*, 1722 Complete Theoretical Writings, Bd. 1, Ed. Erwin R. Jacobi, American Institute of Musicology 1967

[17] Theinred von Dover: *MS. Oxford, Bodley 842*, fol. 19/20 in: Fritz Reckow: *Der Musiktraktat des Anonymus 4*, Teil 1, *p. 78*, Beihefte zum Archiv für Musikwissenschaft, Band IV, Franz Steiner Verlag, Wiesbaden 1967

[18] Johannes Tinctoris: *Liber de arte contrapuncti. Opera Theoretica*, Vol. 2, ed. Albert Seay, American Institute of Musicology 1975

[19] Martin Vogel: *Die Lehre von den Tonbeziehungen*. Verlag für systematische Musikwissenschaft, Bonn - Bad Godesberg 1975

[20] Martin Vogel: *Die Berechnung emmelischer und ekmelischer Mehrklänge*. Mikrotöne II, Ed. Franz Richter Herf, Helbling, Innsbruck 1988, p. 65-72

[21] Gioseffo Zarlino: *Le Istitutioni harmoniche*. 1573, Nachdruck, The Gregg Press Incorporated, New Jersey, 1966

Anmerkungen

1) Es gelten folgende Abschätzungen:

(1) $\Gamma(n) \leq n$, $\Gamma(n)=n$ genau dann, wenn n eine Primzahl oder gleich 1 ist.

(2) $\Gamma(n) \geq k$, wobei k die kleinste natürliche Zahl ist mit $n<2^k$.

2) Diese Funktion hat die Eigenschaften $\Gamma'(p)=p$ für Primzahlen p und $\Gamma'(ab)=\Gamma'(a)+\Gamma'(b)$ für beliebige ganze Zahlen a und b. Veränderung eines Intervalls um eine Oktave bewirkt eine Änderung des Funktionswertes um 2 und nicht um 1 wie bei der Gradusfunktion.

3) Es müßten die Periodizitäten der einzelnen Töne in Beziehung zur Periodizität des Zusammenklangs gesetzt werden. Diese Aufgabe wird aber durch eine synthetische Wahrnehmung erschwert. Intervalle mit ganzzahligen Grundfrequenzverhältnissen können ja immer als Einzeltöne einer anderen Klangfarbe interpretiert werden.

4) Hier ergibt die in Kap. 3 beschriebene Funktionen $\Gamma'=\Sigma p_i r_i$ "bessere" Werte:

	Γ'	Γ
4 : 5 : 6	12	9
8 : 9 : 12	12	8

5) Es ist anzumerken, daß Barlow die Intervalle einer Skala ungleichmäßig bewertet. Für die Durskala wählt er einen Ausschnitt von der Tonika bis und mit deren Oktave. Von diesen acht Tönen untersucht er alle Paare von Tönen. Dadurch läßt sich erklären, weshalb die reinstimmige parallele natürliche Mollskala (Erniedrigung der zweiten melodischen Stufe in reingestimmtem Dur um ein syntonisches Komma) nicht eine zweite optimale Rationalisierung der 12-temperierten Durskala ist, was sie bei einer gerechten Bewertung der auftretenden Intervalle wäre, denn sie ensteht aus der Durskala durch Umkehrung.